

# 4

## Introducció als nombres enters

1. La necessitat dels nombres enters
2. Dels nombres naturals als nombres enters
3. Representació, ordenació i comparació de nombres enters
4. Suma de nombres enters
5. Propietats de la suma de nombres enters
6. Resta de nombres enters
7. Multiplicació de nombres enters. Divisió exacta de nombres enters.
8. Potències de nombres enters

El lloc més fred del món habitat permanentment és la localitat d'Ojm'akon, població de la Sibèria (Rússia), que té 4000 habitants i està situada a  $63^{\circ} 16' N$  i  $143^{\circ} 15' E$  i a 700 m sobre el nivell del mar. L'any 1933 s'hi van enregistrar  $-68^{\circ}C$ .

Com ja deus saber, l'oscil·lació tèrmica és la diferència entre la temperatura màxima i la mínima. L'oscil·lació tèrmica més gran enregistrada en un sol dia a la Terra es va produir a Browning, a l'estat de Montana (EUA), els dies 23 i 24 de gener de l'any 1916. La temperatura va baixar de  $7^{\circ}C$  a  $-49^{\circ}C$ . Hi va haver, per tant, una oscil·lació tèrmica de  $56^{\circ}C$ .





### QÜESTIONS

- Calcula:

a)  $24 + 3 \cdot 5$

b)  $4 \cdot 6 - 21 : 3$

c)  $(9 - 2) \cdot 3 - 2 \cdot (6 + 4)$

d)  $8 \cdot 7 : 4$

- Efectua les operacions següents:

a)  $3^3 + 2^3$

b)  $4^3 - 4^2$

c)  $(3 + 2)^3$

d)  $2^4 : 8$

- Indica si les igualtats següents són certes o falses:

a)  $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$

b)  $(2^2)^3 = 2^5$

c)  $3^3 \cdot 2^3 = 6^3$

d)  $2^4 = 4^2$

e)  $3^2 = 2^3$

### OBJECTIUS

- Distingir entre els nombres enters i els nombres naturals.
- Representar nombres enters en la recta numèrica.
- Ordenar i comparar nombres enters.
- Sumar i restar amb nombres enters.
- Multiplicar i dividir nombres enters.
- Calcular potències de nombres enters.
- Utilitzar nombres enters en la resolució de problemes.

## 1.

## La necessitat dels nombres enters

Hi ha situacions de la vida quotidiana en les quals cal utilitzar un tipus de nombres diferents dels naturals. Tot seguit en veurem alguns exemples.

Els mitjans de comunicació ofereixen informació sobre les temperatures màxima i mínima enregistrades en diferents ciutats. Utilitzant com a referència la temperatura  $0^{\circ}\text{C}$ , podem diferenciar si una temperatura està per sota o per sobre de  $0^{\circ}\text{C}$  observant si porta un signe negatiu al davant o no:

4 graus sobre zero  $\rightarrow 4^{\circ}\text{C}$

5 graus sota zero  $\rightarrow -5^{\circ}\text{C}$

Per distingir els pisos que es troben per sobre de la planta baixa d'un edifici dels que hi ha per sota, les plaques dels ascensors tenen els botons numerats de tal manera que a la planta baixa se li assigna el nombre 0, a les plantes superiors els correspon un nombre natural: 1, 2, 3, ... i les plantes subterrànies es diferencien de les altres perquè els nombres corresponents porten un signe menys:  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , ... Així, per exemple:

3r pis  $\rightarrow 3$

planta baixa  $\rightarrow 0$

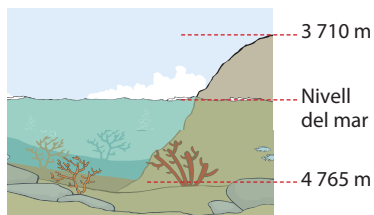
soterrani 2  $\rightarrow -2$

Prenent el nivell del mar com a valor o punt de referència, les altituds que es troben per sobre d'aquesta altitud les podem expressar amb un nombre natural i les que hi ha per sota del nivell del mar es poden expressar amb un nombre natural amb signe menys al davant. Per exemple:

3 710 m altitud  $\rightarrow 3\,710\text{ m}$

nivell del mar  $\rightarrow 0\text{ m}$

4 765 m de profunditat  $\rightarrow -4\,765\text{ m}$



Per mesurar el temps, en la civilització cristiana es pren com a punt de referència el naixement de Jesucrist, de manera que els esdeveniments anteriors al seu naixement s'expressen amb un nombre natural amb signe menys o bé van acompanyats de les lletres aC (abans de Crist), per diferenciar-los dels posteriors al naixement de Jesucrist, que es representen mitjançant nombres naturals o bé van acompanyats de les lletres dC (després de Crist). Fixa't en els exemples següents:

234 aC  $\rightarrow$  any  $-234$

1995 dC  $\rightarrow$  any 1995

Per comparar les hores dels diferents països, la Terra es divideix en vint-i-quatre fusos (zones compreses entre dos meridians), de manera que es pren com a origen, nombre 0, el fus de Greenwich. Cap a l'est, els fusos són: 1, 2, 3 i així successivament, per indicar que és una, dues o tres hores més tard. Mentre que cap a l'oest els fusos són:  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , per indicar que és una, dues o tres hores més d'hora. La taula següent mostra l'hora en alguns països respecte a l'hora de Greenwich:

| País      | Fus | País              | Fus | País   | Fus |
|-----------|-----|-------------------|-----|--------|-----|
| Argentina | -4  | EUA (Nova York)   | -5  | Índia  | 5   |
| Austràlia | 10  | EUA (Los Angeles) | -7  | Israel | 2   |
| Brasil    | -3  | França            | 1   | Marroc | 0   |
| Espanya   | 1   | Japó              | 9   | Xina   | 8   |

Per establir la classificació dels jugadors en els torneigs de golf s'utilitzen els nombres naturals per indicar que el nombre de cops que ha necessitat un jugador determinat per completar els divuit forats del camp ha estat superior al par del camp, mentre que s'utilitzen els nombres naturals amb signe menys per indicar que el nombre de cops necessaris ha estat inferior al par del camp. Per exemple, suposem un camp de par 70, la situació de diferents jugadors seria:

Jugador A, 72 cops  $\rightarrow$  2 cops

Jugador B, 69 cops  $\rightarrow$  -1 cop

Jugador C, 70 cops  $\rightarrow$  0 cops

Jugador D, 73 cops  $\rightarrow$  3 cops

Jugador E, 67 cops  $\rightarrow$  -3 cops

En els exemples anteriors, per representar una situació determinada hem utilitzat nombres naturals i un altre tipus de nombres, que no són naturals. És a dir, hem utilitzat el 0, els nombres naturals i els nombres naturals amb signe menys. Tots aquests nombres s'anomenen **nombres enters**. En aquesta unitat coneixerem i treballarem aquest nou tipus de nombres.

### activitats resoltes

#### 1. Expressa les situacions següents mitjançant nombres enters:

- La temperatura mínima d'un dia d'hivern a Toronto va ser de  $17^{\circ}\text{C}$  sota zero.
- Sóc al soterrani 4 d'uns grans magatzems.
- La temperatura màxima d'un dia d'estiu va ser de  $20^{\circ}\text{C}$  sobre zero.
- El meu amic viu a la setena planta d'aquest edifici.
- M'han cobrat 320 € de la llibreta d'estalvi.
- Pitàgores va néixer a Samos l'any 580 aC.
- A Calcuta són 5 hores més tard que a Rabat.
- El Sergi només ha necessitat 66 cops per fer tot el recorregut d'un camp de golf de par 68.

- a)  $-17^{\circ}\text{C}$     b) -4    c)  $20^{\circ}\text{C}$     d) 7  
e) -320 €    f) L'any -580    g) 5 h    h) -2 cops

#### 2. Descriu situacions de la vida quotidiana que es puguin expressar mitjançant els nombres enters següents: 1 420, -5, 0, 37 i -8.

Per a cadascun dels nombres enters podem descriure diferents situacions. N'escriurem només una per a cada nombre; per exemple:

1 420  $\rightarrow$  Volo amb globus a una altitud de 1 420 m.

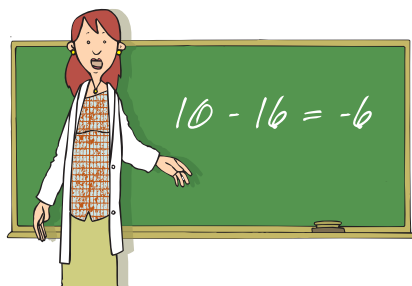
-5  $\rightarrow$  La temperatura ha baixat  $5^{\circ}\text{C}$ .

0  $\rightarrow$  Sóc a la planta baixa d'un edifici.

37  $\rightarrow$  M'han pagat 37 €.

-8  $\rightarrow$  Estem a  $8^{\circ}\text{C}$  sota zero.

## 2.

Dels nombres naturals  
als nombres enters

En l'apartat anterior hem vist que els nombres enters ens serveixen per expressar situacions de la vida real. Tot seguit, veurem com podem obtenir aquests nous nombres a partir dels nombres naturals.

En la unitat 1 has vist que en el conjunt dels nombres naturals la suma sempre és possible, ja que el resultat de sumar dos nombres naturals és un altre nombre natural. Però no passa el mateix amb la resta, que només és possible si el minuend és més gran que el subtrahend. Fixa't en les igualtats següents, en les quals volem determinar el valor d'un dels dos sumands  $n$ , sabent el resultat de la suma. Per determinar el valor del sumand que ens falta, per tant, hem d'efectuar una resta:

$$a) 7 + n = 10 \rightarrow n = 10 - 7 = 3$$

$$b) n + 7 = 15 \rightarrow n = 15 - 7 = 8$$

En aquests dos primers casos, el valor de  $n$  és un nombre natural. En canvi, en els que hi ha a continuació els diferents valors de  $n$  no són nombres naturals:

$$c) 3 + n = 2 \rightarrow n = 2 - 3 = -1$$

$$d) n + 12 = 8 \rightarrow n = 8 - 12 = -4$$

$$e) 16 + n = 10 \rightarrow n = 10 - 16 = -6$$

$$f) n + 4 = 4 \rightarrow n = 4 - 4 = 0$$

**Per saber-ne més**

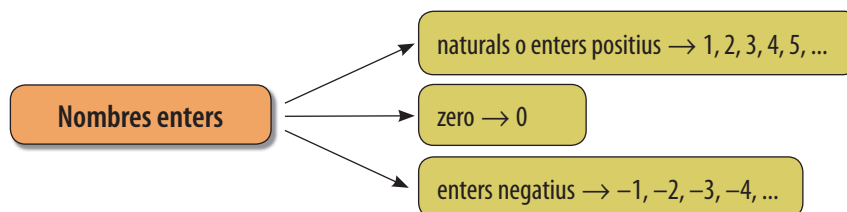
El conjunt dels nombres naturals es representa per la lletra  $\mathbb{N}$ , mentre que per representar el conjunt dels nombres enters s'utilitza la lletra  $\mathbb{Z}$ .

Si analitzem, per exemple, el primer d'aquests casos, ens adonem que no hi ha cap nombre natural que sumat a 3 doni 2 de resultat, i passa el mateix en la resta corresponent que no té resultat entre els naturals. Això ens fa pensar que necessitem uns altres nombres a més dels naturals, perquè amb els naturals no sempre és possible efectuar les restes que se'ns plantegen.

Observant totes les restes anteriors, es dedueix fàcilment que si el subtrahend és més gran o igual que el minuend, el resultat no és un nombre natural. De manera que no tots els valors de  $n$  obtinguts anteriorment són nombres naturals, però sí que són nombres enters.

En els resultats hi ha nombres positius, que són nombres naturals, hi ha un resultat que és 0, i també n'hi ha alguns de negatius, i tots són nombres enters.

Els nombres enters són, doncs, tots els nombres naturals, el zero i els nombres naturals amb signe menys, que anomenarem **enters negatius**. L'esquema següent resumeix el que hem dit fins ara:



Només es posa el signe als enters negatius, mentre que els positius es representen sense cap signe.

Tal com acabem de veure, els nombres enters que no porten el signe menys són els naturals, que des d'ara anomenarem enters positius. En canvi, els nombres naturals que porten el signe menys són els enters negatius. Mentre que el nombre enter 0 no és positiu ni negatiu.

Ara que coneixem els nombres enters, és important insistir en la idea que a partir d'aquest moment caldrà diferenciar els valors positius dels valors negatius, col·locant quan convingui el signe menys al davant d'un nombre natural i tenint en compte que el signe menys modificarà totalment el significat del nombre.

## activitats resoltes



**3.** Determina el valor de  $n$  en cadascuna de les igualtats següents i indica en cada cas de quin tipus de nombre es tracta:

a)  $n + 13 = 24$       b)  $10 + n = 7$

c)  $24 + n = 17$       d)  $n + 22 = 35$

a)  $n = 24 - 13 = 11$  (natural i, per tant, enter)

b)  $n = 7 - 10 = -3$  (enter)

c)  $n = 17 - 24 = -7$  (enter)

d)  $n = 35 - 22 = 13$  (natural i, per tant, enter)

**4.** Escribe un nombre tal que:

a) Sigui enter, però no natural.

b) Sigui enter i natural.

c) Sigui enter negatiu.

d) No sigui positiu ni negatiu.

Per als tres primers casos, hi ha infinites solucions, però evidentment només n'escrivem una a tall d'exemple:

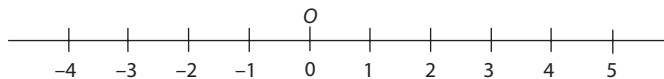
a)  $-5$       b)  $4$       c)  $-1$

Per a l'últim cas, només hi ha una solució: d)  $0$

### 3. Representació, ordenació i comparació de nombres enters

Els nombres enters es poden representar gràficament. Per fer-ho, es pren un punt com a origen, que es representa amb la lletra  $O$ , al qual assignem el nombre  $0$ . A la dreta hi assenyallem un altre punt qualsevol, que representarà el nombre enter  $1$ . El segment que té d'extrems els punts  $0$  i  $1$  s'anomena **segment unitat**.

El segment unitat es va col·locant sobre la recta, a partir del punt  $O$ , tant cap a la seva dreta com cap a la seva esquerra. Els extrems dels segments unitat situats a la dreta del zero corresponen a la representació dels nombres enters positius, mentre que els extrems dels segments unitat situats a l'esquerra del zero corresponen a la representació dels enters negatius.



La recta sobre la qual es representen els nombres enters s'anomena **recta numèrica**.

La representació dels nombres enters sobre la recta numèrica ens permet conèixer al mateix temps com s'ordenen i, per tant, ens ofereix la possibilitat de comparar-los entre si. Cada nombre enter és més petit que el següent i més gran que l'anterior, és a dir:

$$\dots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \dots$$

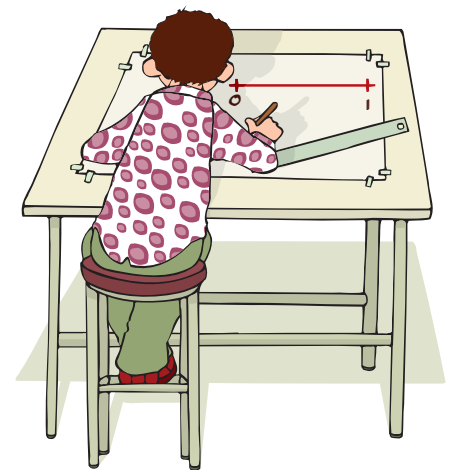
Per comparar dos nombres enters, només cal observar la situació de cadascun sobre la recta, ja que:

Donats dos nombres enters qualsevol, és més petit el que hi ha representat més a l'esquerra sobre la recta.

Així:

$3$  és més petit que  $6$ , perquè  $3$  està situat més a l'esquerra que  $6$ . Ho podem expressar de dues maneres:  $3 < 6$  o  $6 > 3$

$-5$  és més petit que  $-3$ , perquè  $-5$  està situat més a l'esquerra que  $-3$ . Ho expressem així:  $-5 < -3$  o  $-3 > -5$



Per comparar tres nombres enters, aplicarem la propietat transitiva, és a dir:

Com que  $-1 < 2$  i  $2 < 4$ , aleshores  $-1 < 4$ , de manera que podem escriure:

$$-1 < 2 < 4$$

De la mateixa manera, podem comparar més de tres nombres enters, com per exemple:

$$-4 < -2 < 0 < 3 < 7$$

D'acord amb el criteri de comparació establert, es verifica que:

Qualsevol nombre enter negatiu és més petit que qualsevol nombre enter positiu.

Tot nombre enter positiu és més gran que zero.

Qualsevol nombre enter negatiu és més petit que zero.

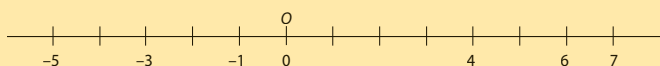
Per tant, per indicar que un nombre enter  $a$  és positiu escriurem  $a > 0$ , mentre que per indicar que és negatiu escriurem  $a < 0$ .



### activitats resoltes

- 5.** Representa en una recta els nombres enters  $-3$ ,  $6$ ,  $4$ ,  $-5$ ,  $7$  i  $-1$ , i ordena'ls.

Primer els representem sobre la recta numèrica:



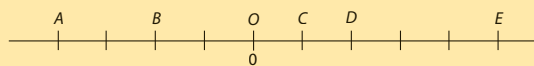
Ara ja els podem ordenar de més gran a més petit:

$$7 > 6 > 4 > -1 > -3 > -5$$

O de més petit a més gran:

$$-5 < -3 < -1 < 4 < 6 < 7$$

- 6.** Quin nombre enter representa cadascun dels punts assenyalats amb les lletres A, B, C, D i E?



$$\begin{aligned} A &\rightarrow -4 & B &\rightarrow -2 \\ C &\rightarrow 1 & D &\rightarrow 2 & E &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

- 7.** Escriu el símbol  $<$  o  $>$ , segons convingui:

- |                  |                    |                 |
|------------------|--------------------|-----------------|
| a) $7 \dots -5$  | b) $-17 \dots -21$ | c) $0 \dots 8$  |
| d) $-4 \dots -1$ | e) $9 \dots -2$    | f) $-3 \dots 1$ |
| a) $7 > -5$      | b) $-17 > -21$     | c) $0 < 8$      |
| d) $-4 < -1$     | e) $9 > -2$        | f) $-3 < 1$     |



### Sabies que...

Si en un conjunt numèric és possible una determinada operació, també serà possible en un altre conjunt que el contingui.

## 4.

## Suma de nombres enters

En el conjunt dels nombres naturals, l'operació suma és sempre possible, perquè en sumar dos nombres naturals sempre s'obté un altre nombre natural. Com que el conjunt dels nombres enters és una ampliació del conjunt dels nombres naturals, podem entendre l'operació suma de manera que és sempre possible en el conjunt dels enters.

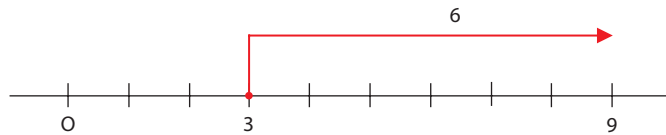
La suma de dos nombres enters és **sempre** un altre nombre enter.

Tot seguit veurem com s'efectua la suma de nombres enters, a partir de la seva representació gràfica en la recta numèrica. Distingirem tres casos:

— Suma de dos nombres enters positius

Per exemple, volem sumar  $3 + 6$ :

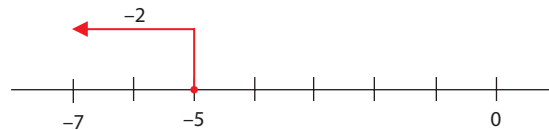
Si avancem 6 unitats cap a la dreta a partir del nombre 3 arribem al nombre 9.  
Per tant:  $3 + 6 = 9$ .



— Suma de dos nombres enters negatius

Ara volem sumar  $-5 + (-2)$ . Per fer-ho, ens desplacem 2 unitats cap a l'esquerra a partir del nombre  $-5$ , i arribem al nombre  $-7$ .

Així doncs:  $-5 + (-2) = -7$ .

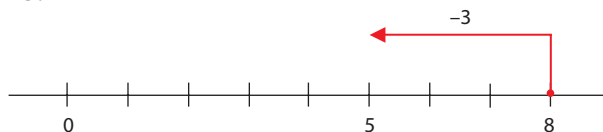


Fixa't que en aquest cas hem escrit el nombre  $-2$  entre parèntesi. Aquest parèntesi és del tot necessari, perquè separa dos signes diferents, el positiu que indica la suma i el negatiu del nombre enter  $-2$ . En canvi, el  $-5$  l'hem escrit sense parèntesi, perquè és el primer nombre de l'operació.

— Suma de dos nombres enters de diferent signe

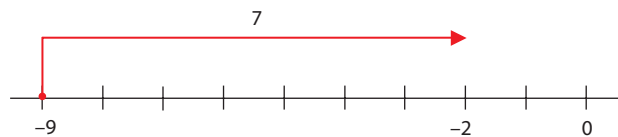
Per sumar  $8 + (-3)$ , ens situem en el punt que representa el nombre enter 8 i ens desplacem 3 unitats cap a l'esquerra; arribem al punt que representa el nombre enter 5.

Així:  $8 + (-3) = 5$ .



En canvi, per sumar  $-9 + 7$  ens situem en el punt que representa el nombre enter  $-9$  i ens desplacem 7 unitats cap a la dreta; arribem al punt que representa el nombre enter  $-2$ .

Per tant:  $-9 + 7 = -2$ .



En general, podem resumir-ho així:  $a + d = s$ . Aquesta expressió ens indica que hem de situar-nos sobre el punt que representa el nombre enter  $a$  (primer sumand), i partint d'aquest punt desplaçar-nos  $d$  unitats (segon sumand), cap a la dreta si  $d$  és positiu o cap a l'esquerra si  $d$  és negatiu. El punt d'arribada ens indica el resultat  $s$  de la suma.

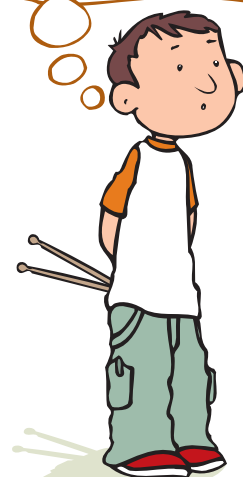
Però en la pràctica no cal resoldre les sumes a partir de la recta numèrica, sinó que es fan mentalment. Si ens fixem en els resultats anteriors:

$3 + 6 = 9 \rightarrow$  És com sumar dos nombres naturals.



En cap operació matemàtica no es poden escriure mai dos signes seguits. Cal separar-los sempre mitjançant un parèntesi.

$$-5 + (-2) = -7$$



$-5 + (-2) = -7 \rightarrow$  En aquest cas, resulta que és com sumar dos nombres naturals, però amb el signe negatiu.

$$8 + (-3) = 5 \text{ i } -9 + 7 = -2$$

Aquests dos exemples són semblants. Fixa't que és com si féssim la resta de dos nombres naturals, i el signe del resultat és el del sumand que es troba més allunyat del zero.

Tot seguit farem unes quantes sumes en les quals aplicarem el que acabem de veure:

$$12 + (-7) = 5$$

$$-10 + (-8) = -18$$

$$-13 + 9 = -4$$

$$11 + 21 = 32$$

$$-21 + (-12) = -33$$

$$-6 + 13 = 7$$

$$25 + (-39) = -14$$

$$-18 + 7 = -11$$



### activitats resoltes

- 8.** Representa sobre la recta numèrica les sumes següents i indica'n el resultat:

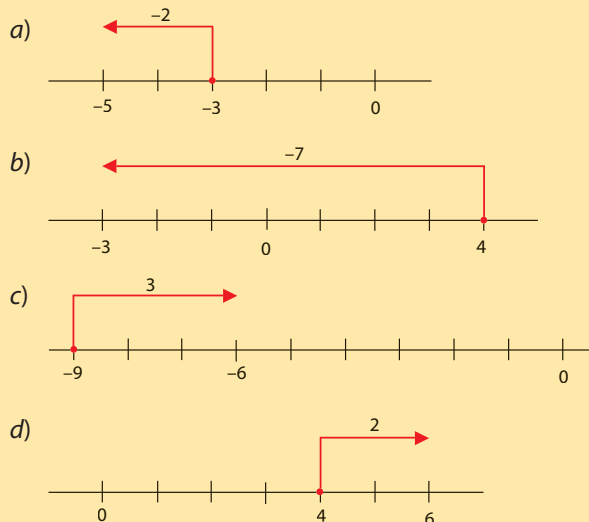
a)  $-3 + (-2)$

b)  $4 + (-7)$

c)  $-9 + 3$

d)  $4 + 2$

Representant cadascuna de les sumes:



S'observa que:

a)  $-3 + (-2) = -5$

b)  $4 + (-7) = -3$

c)  $-9 + 3 = -6$

d)  $4 + 2 = 6$

- 9.** Efectua les sumes següents:

a)  $9 + 3$

b)  $13 + (-5)$

c)  $-12 + (-1)$

d)  $-4 + 6$

e)  $11 + (-16)$

f)  $-21 + (-15)$

a)  $9 + 3 = 12$

b)  $13 + (-5) = 8$

c)  $-12 + (-1) = -13$

d)  $-4 + 6 = 2$

e)  $11 + (-16) = -5$

f)  $-21 + (-15) = -36$

- 10.** Troba el valor de  $a$  en cadascuna de les sumes següents:

a)  $15 + a = 20$

b)  $a + 6 = -1$

c)  $-10 + a = -9$

d)  $-7 + a = 3$

Cadascun dels sumands que falten es pot calcular mentalment:

a)  $15 + a = 20 \rightarrow a = 5$

b)  $a + 6 = -1 \rightarrow a = -7$

c)  $-10 + a = -9 \rightarrow a = 1$

d)  $-7 + a = 3 \rightarrow a = 10$

- 11.** Una de les set meravelles de l'Antiguitat era l'estàtua del déu Apol·lo, més coneguda com el Colós de Rodas, ja que estava situada a l'entrada del port de la ciutat grega de Rodas. Es va construir l'any 280 aC, però un terratrèmol la va destruir 56 anys més tard. Quin any va ser destruïda pel terratrèmol?

Per respondre a la pregunta n'hi ha prou amb sumar l'any de la construcció amb els anys transcorreguts. Per representar els anys, tal com s'ha indicat al principi de la unitat, associem els anys abans de Crist (aC) amb els nombres enters negatius. Així, la suma que hem d'efectuar és la següent:

$$-280 + 56 = -224$$

Per tant, tornant a associar el nombre enter negatiu amb els anys abans de Crist (aC), podem dir que l'estàtua va ser destruïda l'any 224 aC.

## 5. Propietats de la suma de nombres enters

Com que els nombres naturals també són enters, les propietats commutativa i associativa de la suma que es verifiquen per als nombres naturals també s'han de complir per als nombres enters. Però en el conjunt dels nombres enters es compleixen altres propietats que no es verifiquen en el conjunt dels nombres naturals. Vegem-ho.

La suma de nombres enters compleix les propietats següents:

### Propietat commutativa

Donats dos nombres enters  $a$  i  $b$ , es compleix que  $a + b = b + a$ .

Aquesta propietat ens indica que l'ordre dels sumands no altera la suma. En efecte, ho podem veure en l'exemple següent:

$$\left. \begin{array}{l} -3 + 5 = 2 \\ 5 + (-3) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow -3 + 5 = 5 + (-3)$$

### Propietat associativa

Donats tres nombres enters  $a$ ,  $b$  i  $c$ , es verifica que  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

És a dir, en una suma de tres sumands o més el resultat de la suma no depèn de la manera com els agrupem.

Comprovem-ho en la suma  $-2 + 4 + (-6)$ .

Podem agrupar els sumands d'aquesta manera:  $(-2 + 4) + (-6) = 2 + (-6) = -4$ .

O bé d'aquesta altra:  $-2 + [4 + (-6)] = -2 + (-2) = -4$ .

El resultat de la suma no varia. Per tant:  $(-2 + 4) + (-6) = -2 + [4 + (-6)]$ .

### Element neutre

Donat un nombre enter  $a$  qualsevol, es compleix que  $a + 0 = a$ .

Aquesta propietat ens indica que el nombre 0 és l'element neutre de la suma de nombres enters. Això vol dir que si sumem el nombre 0 a qualsevol nombre enter, s'obté aquest mateix nombre. Per exemple:

$$-4 + 0 = -4 \quad 0 + 7 = 7$$

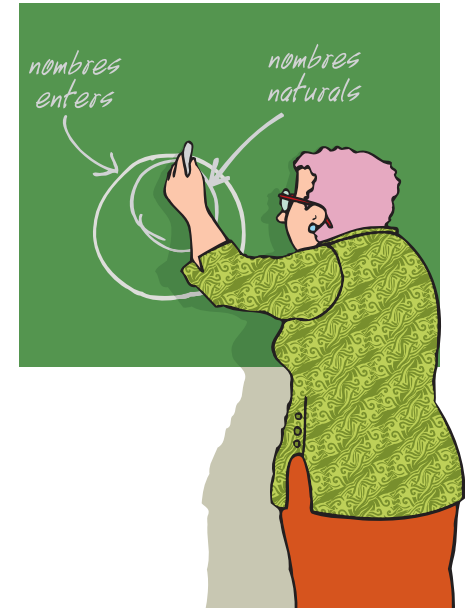
### Element oposat

Donat un nombre enter  $a$  qualsevol, n'existeix un altre  $-a$ , tal que  $a + (-a) = 0$ .

Ens indica que tot nombre enter  $a$  té el seu nombre oposat  $-a$ , de manera que si sumem un nombre enter amb el seu oposat el resultat és l'element neutre 0. Podem afirmar, doncs, que dos nombres enters són oposats si la seva suma és 0.

$-4$  és l'oposat de  $4$ , perquè  $4 + (-4) = 0$

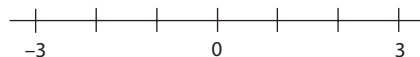
$7$  és l'oposat de  $-7$ , perquè  $-7 + 7 = 0$



### Sabies que...

L'oposat de l'oposat d'un nombre enter és el mateix nombre enter:  $-(-a) = a$ .

Si representem gràficament a la recta numèrica dos nombres enters oposats, per exemple el 3 i el  $-3$ , veurem que els punts on se situen són a la mateixa distància del punt on hem col·locat el 0, és a dir, són punts simètrics respecte de  $O$ .



Les propietats de l'element neutre i de l'element oposat no es verifiquen en la suma de naturals, perquè ni el 0 ni els nombres negatius no són nombres naturals.



### activitats resoltes

#### 12. Calcula:

a)  $13 + (-8) + (-9) + 6$       b)  $-8 + 4 + (-5) + 2 + (-7)$

Per efectuar les operacions apliquem la propietat associativa de la suma, que ens permetrà anar agrupant els sumands de dos en dos, per l'esquerra:

a)  $13 + (-8) + (-9) + 6 = 5 + (-9) + 6 = -4 + 6 = 2$

b)  $-8 + 4 + (-5) + 2 + (-7) = -4 + (-5) + 2 + (-7) = -9 + 2 + (-7) = -7 + (-7) = -14$

#### 13. Si $a = 5$ i $b = -8$ , calcula:

a)  $a + b$       b)  $-a + b$       c)  $-b + a$       d)  $a - b$

Només cal substituir  $a$  i  $b$  pel seu valor i efectuar la suma corresponent:

a)  $a + b = 5 + (-8) = -3$

b)  $-a + b = -5 + (-8) = -13$

c)  $-b + a = -(-8) + 5 = 8 + 5 = 13$

d)  $a - b = 5 - (-8) = 13$

En aquest últim apartat hem utilitzat la propietat de l'element oposat:  $-(-8) = 8$ , ja que l'oposat de  $-8$  és 8.

#### 14. Si sumem un nombre enter amb l'oposat del seu oposat el resultat és $-30$ . Calcula aquest nombre enter.

L'oposat de l'oposat d'un nombre enter és el mateix nombre. Per tant, cal trobar un nombre enter que sumat amb ell mateix doni  $-30$ . És evident que aquest nombre és  $-15$ , perquè  $-15 + (-15) = -30$ .

## 6.

## Resta de nombres enters

Al començament de la unitat hem vist que en el conjunt dels nombres naturals no sempre és possible la resta, ja que en restar dos nombres naturals el resultat no ha de ser necessàriament un altre nombre natural. En el conjunt dels nombres enters, però, la resta sempre és possible, ja que:

La resta de dos nombres enters és sempre un altre nombre enter.

A partir de la suma de nombres enters i de les propietats d'aquest conjunt de nombres, podem transformar una resta en suma, perquè la diferència de dos nombres enters s'obté de sumar al minuend l'oposat del subtrahend:

Donats dos nombres enters  $a$  i  $b$ , es verifica que  $a - b = a + (-b)$ .

Apliquem aquesta transformació a les restes següents:

$$7 - 4 = 7 + (-4) = 3$$

$$5 - 9 = 5 + (-9) = -4$$

$$6 - (-8) = 6 + 8 = 14$$

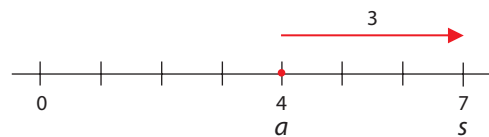
$$-5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$

Tal com hem fet en la introducció de la suma de nombres enters, la resta també es pot fer a partir de la representació sobre la recta numèrica. El procediment s'exposa tot seguit.

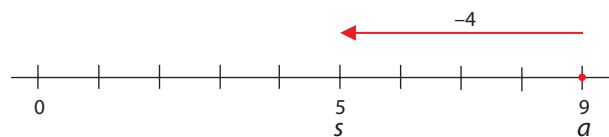
Anteriorment, quan hem calculat la suma a partir de la representació gràfica sobre la recta numèrica, l'hem indicat com:  $a + d = s$ , i aquesta igualtat es pot expressar d'una altra manera:  $s - a = d$ , és a dir, el minuend  $s$  ens indica la posició final, el subtrahend  $a$  indica la posició inicial i el resultat de la resta  $d$  és el desplaçament. De la mateixa manera que en la suma, si el desplaçament és cap a la dreta el resultat de la resta serà positiu, mentre que si és cap a l'esquerra serà negatiu.

Efectuem gràficament les restes anteriors:

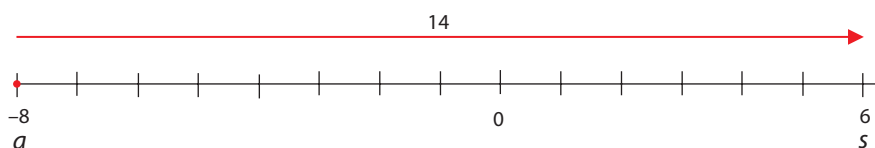
$7 - 4$ . La posició final és 7, i la inicial és 4. Per tant, ens hem desplaçat 3 unitats cap a la dreta. Així, resulta que:  $7 - 4 = 3$ .



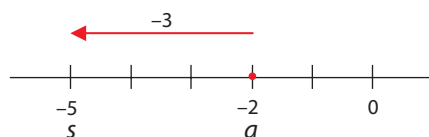
$5 - 9$ . Per arribar al 5 partint del 9, ens hem de desplaçar 4 unitats cap a l'esquerra, és a dir:  $5 - 9 = -4$ .



$6 - (-8)$ . La posició final és 6, mentre que la inicial és  $-8$ . Per tant, hem fet un desplaçament de 14 unitats cap a la dreta. Així:  $6 - (-8) = 14$ .



$-5 - (-2)$ . Per arribar a la posició final  $-5$  partint de la posició inicial  $-2$ , cal desplaçar-se 3 unitats cap a l'esquerra:  $-5 - (-2) = -3$ .



Tot i que, tal com hem vist, el resultat és el mateix, és evident que per resoldre una resta de nombres enters és més pràctic transformar-la en la suma corresponent, i no resoldre-la gràficament, ja que el procés és molt més lent.

Per acabar, vegem unes quantes restes perquè t'hi vagis familiaritzant:

$$4 - (-8) = 4 + 8 = 12$$

$$-12 - 8 = -12 + (-8) = -20$$

$$13 - 21 = 13 + (-21) = -8$$

$$-9 - (-21) = -9 + 21 = 12$$





## activitats resoltes

**15.** Calcula les restes següents:

- a)  $-8 - 5$
- b)  $2 - (-7)$
- c)  $6 - 10$
- d)  $-3 - (-3)$

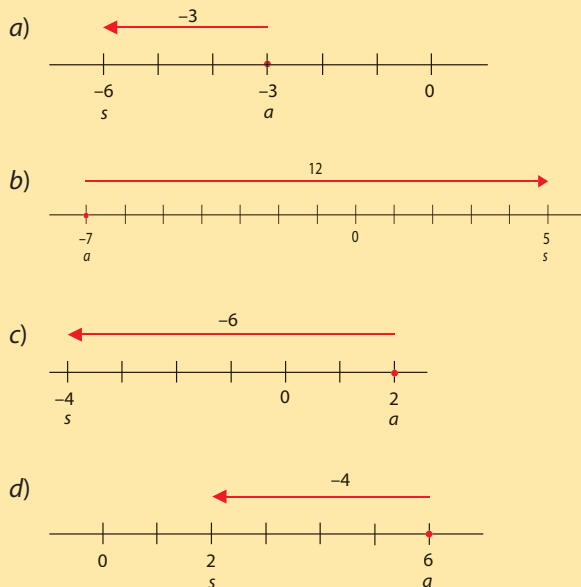
Transformant les restes en sumes, obtenim:

- a)  $-8 - 5 = -8 + (-5) = -13$
- b)  $2 - (-7) = 2 + 7 = 9$
- c)  $6 - 10 = 6 + (-10) = -4$
- d)  $-3 - (-3) = -3 + 3 = 0$

**16.** Representa sobre la recta numèrica les restes següents i indica'n el resultat:

- a)  $-6 - (-3)$
- b)  $5 - (-7)$
- c)  $-4 - 2$
- d)  $2 - 6$

Representant cadascuna de les restes:



S'observa que:

- a)  $-6 - (-3) = -3$
- b)  $5 - (-7) = 12$
- c)  $-4 - 2 = -6$
- d)  $2 - 6 = -4$

**17.** A Berga, un dia d'hivern, la temperatura a les 7 del matí era de  $4^{\circ}\text{C}$  sota zero. A les 9 havia augmentat  $2^{\circ}\text{C}$ . De les 9 a les 3 de la tarda, la temperatura va pujar  $5^{\circ}\text{C}$ . Fins a les 4 de la tarda, la temperatura es va mantenir constant. De les 4 fins a les 8 del vespre, va baixar  $4^{\circ}\text{C}$ . De les 8 a les 12 de la nit, va tornar a disminuir  $4^{\circ}\text{C}$  més. Quina era la temperatura a les 12 de la nit?

Per l'enunciat del problema sabem que hem de fer les operacions següents:

$$-4^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} + 5^{\circ}\text{C} - 4^{\circ}\text{C} - 4^{\circ}\text{C}$$

Transformant les restes en sumes, resulta:

$$\begin{aligned} & -4^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} + 5^{\circ}\text{C} - 4^{\circ}\text{C} - 4^{\circ}\text{C} = \\ & = -4^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} + 5^{\circ}\text{C} + (-4^{\circ}\text{C}) + (-4^{\circ}\text{C}) = -5^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

La temperatura a les 12 de la nit era de  $-5^{\circ}\text{C}$  o, és el mateix,  $5^{\circ}\text{C}$  sota zero.

**18.** Al barri de Manhattan de Nova York hi ha un gratcel molt conegut, l'Empire State Building. Aquest edifici està format per 102 pisos i 5 plantes subterrànies.

- a) Si som a l'interior de l'ascensor, que està situat a la planta 59, quantes plantes hem de pujar per anar al segon mirador, que està situat a l'última planta?
- b) Des de l'última planta, quantes n'hem de baixar per anar al primer mirador, que és a la planta 86?
- c) I si des del primer mirador volem baixar al 4t soterrani, quantes plantes baixarem?
- d) Des del 4t soterrani, volem anar a la planta 55. Quantes plantes pujarem?

Per respondre a les diferents preguntes, en tots els casos haurem de restar. Per fer-ho, prenem com a minuend el nombre de la planta on volem anar, i com a subtrahend, el nombre de la planta on som. Si la diferència dona un nombre enter positiu, vol dir que hem de pujar; en canvi, si dona un nombre enter negatiu, vol dir que hem de baixar.

- a)  $102 - 59 = 43 \rightarrow$  pujarem 43 plantes
- b)  $86 - 102 = -16 \rightarrow$  baixarem 16 plantes
- c)  $-4 - 86 = -90 \rightarrow$  baixarem 90 plantes
- d)  $55 - (-4) = 55 + 4 = 59 \rightarrow$  pujarem 59 plantes

Observa que en els tres primers apartats la resta l'hem efectuat mentalment, mentre que en l'últim l'hem transformat en suma. En la pràctica, fes-ho com vulguis. El que és més important és que ho facis de manera correcta.

## 7. Multiplicació de nombres enters. Divisió exacta de nombres enters

En aquest apartat veurem com es multipliquen i es divideixen els nombres enters.

### Multiplicació de nombres enters

El producte de dos nombres enters és un altre nombre enter.

Els nombres enters es multipliquen com els nombres naturals, però el signe del producte depèn del signe dels factors que multipliquem.

- Si els dos factors de la multiplicació tenen el **mateix signe**, el producte és un nombre enter **positiu**.
- Si els dos factors de la multiplicació tenen **signe diferent**, el producte és un nombre enter **negatiu**.

Observa la taula que mostra la **regla dels signes** de la multiplicació de dos nombres enters:

|                                                                                   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
|  | + | - |
| +                                                                                 | + | - |
| -                                                                                 | - | + |

Aquí en tens uns quants exemples:

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$6 \cdot (-2) = -12$$

$$-4 \cdot 5 = -20$$

$$-7 \cdot (-2) = 14$$



Recorda que ja no utilitzem el símbol  $\times$  per indicar un producte. Ho fem mitjançant un puntet com aquest:  $\cdot$ .

$$3 \cdot 5 = 15$$

### Divisió exacta de nombres enters

Ja saps que la divisió és l'operació inversa de la multiplicació.

- Quin nombre enter multiplicat per 2 dóna com a resultat  $-8$ ?

El nombre enter que multiplicat per 2 dóna  $-8$  és  $-4$ .

Com en el cas dels nombres naturals, per trobar el factor desconegut d'una multiplicació de nombres enters, hem d'efectuar una divisió. Així:

$$2 \cdot n = -8 \rightarrow n = -8 : 2 = -4$$

- Quin nombre multiplicat per 4 dóna com a resultat  $-15$ ?

Hem de trobar, si existeix, el nombre enter que, multiplicat per 4, dóna com a producte  $-15$ . Per conèixer el factor desconegut, hem de dividir  $-15$  entre 4:

$$4 \cdot n = -15 \rightarrow n = -15 : 4$$

No hi ha cap nombre enter que compleixi aquesta condició.

La divisió de dos nombres enters no sempre dóna un altre nombre enter.

El resultat d'una divisió de nombres enters serà un altre nombre enter si, prescindint dels signes negatius, el dividend és múltiple del divisor. En aquest cas, la divisió de nombres enters equival a la divisió de nombres naturals.



En una divisió exacta:

$D = d \cdot q$  on  $D$  és el dividend,  $d$  és el divisor i  $q$  és el quocient.

**Recorda**

El divisor d'una divisió no pot ser 0.

El signe del quocient d'una divisió de nombres enters depèn dels signes del dividend i del divisor:

- Si el dividend i el divisor tenen el **mateix signe**, el resultat de la divisió és **positiu**.
- Si el dividend i el divisor tenen **signe diferent**, el quocient de la divisió és **negatiu**.

Així:  $20 : 5 = 4$      $-12 : (-4) = 3$      $10 : (-5) = -2$      $-18 : 9 = -2$   
ja que  $4 \cdot 5 = 20$      $3 \cdot (-4) = -12$      $-2 \cdot (-5) = 10$      $-2 \cdot 9 = -18$

La **regla dels signes** de la divisió de nombres enters és la mateixa que utilitzem per a la multiplicació.

|        |   |   |
|--------|---|---|
| $\div$ | + | - |
| +      | + | - |
| -      | - | + |

Observa aquestes divisions de nombres enters:

$$24 : 12 = 2 \quad 36 : (-6) = -6 \quad -40 : 5 = -8 \quad -27 : (-3) = 9$$

**activitats resoltes****19.** Efectua les multiplicacions següents:

a)  $8 \cdot (-50)$     b)  $-3 \cdot (-15)$     c)  $-5 \cdot 20$

Si considerem la regla dels signes, obtenim fàcilment els productes, així:

a)  $8 \cdot (-50) = -400$   
b)  $-3 \cdot (-15) = 45$   
c)  $-5 \cdot 20 = -100$

**20.** Calcula:

a)  $(-2) \cdot 3 \cdot (-4)$     b)  $-5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-1)$

Multipliquem de la mateixa manera que amb els nombres naturals, i respectem la regla dels signes, així:

a)  $(-2) \cdot 3 \cdot (-4) = -6 \cdot (-4) = 24$   
b)  $-5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-1) = 10 \cdot 3 \cdot (-1) = 30 \cdot (-1) = -30$

**21.** Indica si la divisió dóna un nombre enter i en cas afirmatiu calcula'n el quocient:

a)  $40 : 3$     b)  $-48 : 2$     c)  $45 : (-5)$   
d)  $10 : (-1)$     e)  $-57 : 2$     f)  $-7 : (-7)$

a)  $40 : 3$  no dóna com a resultat un nombre enter, ja que 40 no és múltiple de 3.

b)  $-48 : 2 = -24$

c)  $45 : (-5) = -9$

d)  $10 : (-1) = -10$

e)  $-57 : 2$  no dóna com a resultat un nombre enter, ja que 57 no és múltiple de 2.

f)  $-7 : (-7) = 1$

**8.****Potències de nombres enters**

Ja saps que una potència és una multiplicació en què tots els factors són iguals.

Així:  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ , on:

- 2 és la **base** o factor que es repeteix.
- 5 és l'**exponent**. Indica el nombre de vegades que multipliquem el factor per si mateix.
- 32 és el **resultat de la potència**.

En general:

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ vegades}} \\ \text{Base} \end{array}$$

Fins ara només hem calculat potències que tenien per base un nombre natural. Així:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Una **potència de base un nombre enter positiu** és sempre un altre nombre enter positiu.

Si la base d'una potència és un nombre enter negatiu, procedim de la mateixa manera: multipliquem la base per si mateixa tantes vegades com indica l'exponent, i respectem les regles dels signes de la multiplicació.

Així:

$$\begin{aligned} (-8)^2 &= -8 \cdot (-8) = 64 \\ (-5)^3 &= -5 \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 \\ (-3)^4 &= -3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81 \\ (-2)^5 &= -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \end{aligned}$$

Podem determinar el signe d'una potència que té com a base un nombre enter negatiu observant-ne la base i l'exponent:

- Si l'exponent és un nombre **parell**, la potència és **positiva**.
- Si l'exponent és un nombre **senar**, la potència té signe **negatiu**.

En resum, si  $a$  és un nombre enter i  $n$  un nombre natural, es verifica que:

$$\begin{aligned} \bullet a > 0 &\rightarrow a^n > 0 \\ \bullet a < 0 &\rightarrow \begin{cases} a^n > 0 \text{ si } n \text{ és parell} \\ a^n < 0 \text{ si } n \text{ és senar} \end{cases} \end{aligned}$$

La **potència** de qualsevol nombre enter és un altre nombre enter.

Fixa't que, segons això, podem escriure les igualtats següents:

$$(-5)^2 = 5^2 \quad (-2)^4 = 2^4 \quad (-3)^6 = 3^6$$

**Recorda**

Només cal posar parèntesi quan és necessari.

$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = -8 \cdot (-8)$$

## activitats resoltes

### 22. Calcula:

a)  $(-7)^2$       b)  $-7^2$       c)  $(-2)^3$       d)  $-2^3$

Fixa't que en tots els casos, per calcular el resultat d'una potència, el que és important és identificar-ne la base.

a) Atès que la base de la potència és un nombre enter negatiu,  $-7$ , i l'exponent és un nombre parell, la potència és positiva:  $(-7)^2 = 49$ .

b) La base de la potència és positiva,  $7$ .

Per tant,  $-7^2 = -7 \cdot 7 = -49$ .

Fixa't que  $-7^2$  no és el mateix que  $(-7)^2$ , és a dir,  $(-7)^2 \neq -7^2$

c) En aquest cas, la base de la potència és un nombre enter negatiu, i l'exponent és un nombre senar: la potència és negativa. Així:  $(-2)^3 = -8$ .

d) La base de la potència és  $2$  i l'exponent,  $3$ .

Observa:  $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$ .

### 23. Expressa en forma de potència i calcula:

a)  $-9 \cdot (-9)$

b)  $-5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

c)  $-11 \cdot 11$

d)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

a)  $-9 \cdot (-9) = (-9)^2 = 81$

b)  $-5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = -5^4 = -625$

c)  $-11 \cdot 11 = -11^2 = -121$

d)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4 = 16$



## Proposades

- 1.** Utilitza nombres enters per representar les situacions següents:

- a) He pagat un rebut de la llum, l'import del qual era de 48 €.
- b) La temperatura ha augmentat 8 graus centígrads.
- c) He agafat l'ascensor al quart pis i he baixat al soterrani 1.
- d) El 20 de gener de l'any passat es va enregistrar una temperatura mínima de 15 °C sota zero.
- e) L'hora oficial a Catalunya és una hora més que la de les Illes Canàries.
- f) En l'últim recorregut del camp de golf, en Joan ha fet tres cops per sota el par del camp.

- 2.** Troba el valor enter de  $n$  en cadascuna de les igualtats següents i indica en cada cas si és un nombre natural o no:

- a)  $n + 16 = 8$       b)  $21 + n = 37$
- c)  $4 + n = 15$       d)  $n + 32 = 23$

- 3.** Ordena de més gran a més petit els nombres enters següents:

17, -8, -21, 11, -15, 9, 12, -12, 36, -24

- 4.** Escribe el símbol  $<$  o  $>$ , segons convingui:

- a)  $-8 \dots 0$       b)  $-12 \dots -23$
- c)  $0 \dots -6$       d)  $5 \dots -1$
- e)  $-9 \dots 10$       f)  $7 \dots -2$

- 5.** Escribe tots els nombres enters:

- a) Més grans que -3 i més petits que 4.
- b) Compresos entre -2 i 5.

- 6.** Representa sobre la recta numèrica les sumes següents i indica'n el resultat:

- a)  $-8 + (-4)$       b)  $2 + (-5)$
- c)  $-6 + 4$       d)  $5 + 3$
- e)  $6 + (-1)$       f)  $-5 + 7$

- 7.** Efectua les sumes següents:

- a)  $11 + 7$       b)  $16 + (-12)$       c)  $-14 + (-9)$
- d)  $-5 + 8$       e)  $-8 + 1$       f)  $-3 + (-7)$
- g)  $-10 + 13$       h)  $15 + (-5)$       i)  $-12 + (-5)$

- 8.** Calcula:

- a)  $-7 + (-6) + 4 + (-10) + (-3) + 9$
- b)  $18 + 15 + (-25) + 14 + (-17) + (-12)$
- c)  $13 + (-8) + 11 + (-9) + 10 + (-17) + 16$
- d)  $-1 + 6 + (-21) + (-13) + 15 + (-24) + 11 + (-12)$

- 9.** Representa sobre la recta numèrica les restes següents i indica'n el resultat:

- a)  $-9 - (-4)$       b)  $1 - (-3)$       c)  $-6 - 4$
- d)  $3 - 7$       e)  $8 - (-5)$       f)  $-2 - 9$

- 10.** Calcula les restes següents, transformant-les prèviament en sumes:

- a)  $3 - (-9)$       b)  $-2 - 5$       c)  $7 - 15$
- d)  $21 - 12$       e)  $-6 - (-11)$       f)  $-8 - 12$

- 11.** Calcula:

- a)  $-7 + 14 - (-15) - 2 + (-6) - 10$
- b)  $8 - 11 + (-9) - 2 + (-7) - (-13) + 17$
- c)  $2 + 7 - (-18) + (-12) - 5 + 6 - 11$
- d)  $5 - 4 + 3 - 1 + 9 - 5 - 11 + 2$

- 12.** Calcula:

- a)  $-3 \cdot 5$       b)  $3 \cdot 7$       c)  $-3 \cdot 4$
- d)  $-4 \cdot 11$       e)  $-6 \cdot (-3)$       f)  $14 \cdot (-1)$

- 13.** Si  $a = -5$ ,  $b = -4$  i  $c = 2$ , calcula:

- a)  $a + b$       b)  $a - b$       c)  $-a + b$
- d)  $-b - a$       e)  $a \cdot b$       f)  $-b \cdot a$
- g)  $b \cdot c$       h)  $a \cdot b \cdot c$       i)  $-a \cdot c$

- 14.** Troba el valor de  $a$  en cadascuna de les operacions següents:

a)  $-5 + a = 2$                       b)  $a + 8 = -10$   
 c)  $-12 + a = -7$                     d)  $-8 + a = -14$   
 e)  $a - 5 = -5$                         f)  $a - (-3) = -6$   
 g)  $2 - a = -4$                         h)  $-3 - a = 1$

- 15.** Indica si la divisió dóna un nombre enter i, en cas afirmatiu, calcula'n el quocient:

a)  $-140 : 2$                             b)  $15 : (-4)$   
 c)  $19 : (-1)$                            d)  $-130 : 130$   
 e)  $-9 : 5$                                 f)  $-36 : (-9)$

- 16.** Escriu els quatre termes següents de cadascuna de les sèries:

a) 8, 5, 2, ...                        b) -24, -17, -10, ...  
 c) -8, -6, -4, ...                    d) -5, -9, -13, ...

- 17.** Expressa en forma de potència i calcula:



a)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$   
 b)  $-4 \cdot (-4) \cdot (-4)$   
 c)  $-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$   
 d)  $-5 \cdot (-5) \cdot (-5)$   
 e)  $-1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$   
 f)  $-10 \cdot 10$

- 18.** Un dia d'hivern, les temperatures màximes i mínimes enregistrades en diferents ciutats europees van ser les següents:



| Ciutat      | Mínima                | Màxima               |
|-------------|-----------------------|----------------------|
| Brussel·les | $-4^{\circ}\text{C}$  | $-1^{\circ}\text{C}$ |
| Frankfurt   | $-3^{\circ}\text{C}$  | $2^{\circ}\text{C}$  |
| Hèlsinki    | $-15^{\circ}\text{C}$ | $-9^{\circ}\text{C}$ |
| Ginebra     | $-2^{\circ}\text{C}$  | $0^{\circ}\text{C}$  |
| Viena       | $-1^{\circ}\text{C}$  | $2^{\circ}\text{C}$  |

Tenint en compte que la diferència entre la temperatura màxima i la mínima s'anomena *oscil·lació tèrmica*, quina d'aquestes ciutats va tenir més oscil·lació tèrmica? Quina en va tenir menys?

- 19.** Calcula el valor de  $n$  pel qual es verifiquen les igualtats següents:

a)  $n = -18 : (-9)$                     b)  $-5 \cdot n = -20$   
 c)  $n : (-15) = 2$                       d)  $n \cdot 3 = -21$   
 e)  $n : 4 = -9$                         f)  $-5 : n = -1$   
 g)  $-6 : n = 6$                         h)  $n = 11 : (-11)$   
 i)  $n \cdot (-5) = 15$                     j)  $n : (-4) = 20$   
 k)  $n \cdot 2 = -10$                       l)  $n : 5 = 0$

- 20.** Calcula:

a)  $(-15)^2$                               b)  $(-3)^5$   
 c)  $(-2)^5$                                 d)  $-6^3$   
 e)  $(-10)^6$                             f)  $-1^4$

- 21.** El gran pensador i matemàtic grec Tales de Milet, que va defensar que la Terra era esfèrica, va néixer l'any 624 aC i va morir l'any 547 aC. Calcula a quina edat va morir.

- 22.** Un submarí està a 950 m de profunditat. Descendeix gradualment 185 m, i al cap d'una estona, puja 210 m. A quina profunditat es troba ara el submarí?



- 23.** El punt  $K$  està situat a  $\frac{2}{3}$  de la longitud del segment d'extrems  $J$  i  $L$  en la recta numèrica. Sabent que al punt  $J$  li correspon el nombre enter 18 i al punt  $L$ , el nombre enter 93, quin nombre enter correspon al punt  $K$ ?



- 24.** Un submarinista amb escafandre i utilitzant gasos especials pot arribar fins a una profunditat màxima de 130 m. Això representa  $\frac{1}{76}$  de la fondària aproximada de la fossa marina de les Kurils-Kamtxatka, a l'oceà Pacífic. Quina és la fondària d'aquesta fossa?

- 25.** Totes les substàncies tenen una temperatura de fusió (pas de sòlid a líquid) i una temperatura d'ebullició (pas de líquid a gas) que són característiques. La taula següent mostra les temperatures de fusió i d'ebullició de quatre substàncies:

| Substància | Temperatura de fusió | Temperatura d'ebullició |
|------------|----------------------|-------------------------|
| Aigua      | 0 °C                 | 100 °C                  |
| Mercuri    | -39 °C               | 357 °C                  |
| Alcohol    | -114 °C              | 78 °C                   |
| Oxigen     | -219 °C              | -183 °C                 |

- Quants graus ha de baixar la temperatura d'una mostra d'aigua perquè passi de l'estat gasós a l'estat sòlid?
- Calcula quants graus ha de pujar la temperatura d'una mostra de mercuri en estat sòlid a -39 °C, si volem que arribi a la temperatura d'ebullició.
- Tenim alcohol a una temperatura normal de 20 °C i el volem solidificar refredant-lo. Quants graus haurà de baixar la temperatura?
- Quant ha de pujar la temperatura d'una mostra d'oxigen a -225 °C si volem que recuperi l'estat gasós?

- 26.** Un pintor és al mig d'una escala de barrots. Baixa 4 barrots, després en puja 3 i finalment en baixa 5 més, i així arriba a l'últim barrot de l'escala. Quants barrots té l'escala?

- 27.** Tenint en compte les dades sobre els canvis horaris que es presenten al començament de la unitat, respon a les preguntes següents:

- Quan un rellotge marca les 7 del matí a l'Argentina, quina hora assenyala un rellotge a Los Angeles?
- Quina hora és a Tòquio quan a Barcelona són les 8 del vespre?

- 28.** En un torneig de golf, al final de la primera jornada s'han recollit els resultats següents: jugador A, 76 cops; jugador B, 70 cops; jugador C, 72; jugador D, 67; jugador E, 69; jugador F, 66; jugador G, 73; jugador H, 75; jugador J, 71; jugador K, 77; jugador L, 74, i jugador M, 68. Sabent que el par del camp és de 72 cops, escriu la classificació i indica la situació de cada jugador respecte al par del camp.



- 29.** Rebem una nota del banc en la qual ens informa que el saldo del nostre compte és de 124 € a favor del banc. Si posteriorment firmem dos talons més per valor de 95 € cadascun, quin serà el saldo del compte?

- 30.** El muntacàrregues d'una fàbrica es mou a una velocitat de dues plantes cada minut. En un moment donat passa per la 2a planta, i està pujant:

- On era el muntacàrregues fa 2 minuts?
- On serà d'aquí a 3 minuts?
- Des que ha passat per la planta baixa, quant trigarà a arribar a la 8a planta?
- I per anar de la 8a planta al soterrani 2, quant trigarà?

- 31.** Un equip de biòlegs vol explorar les restes d'un vaixell situat a 70 m de profunditat, en una vall marina a la plataforma continental de la costa catalana. Per poder arribar a la zona indicada, els cal tenir una bona preparació física i dominar el submarinisme. Per això, comencen a capbussar-se diàriament: primer baixen fins als 12 m, i cada dia baixen 5 m més que el dia anterior. A quina profunditat arribaran després de vuit dies d'entrenament? Quants dies trigaràn a arribar al vaixell?



## Reforç

1. Troba el valor de  $n$  en cadascuna de les igualtats següents i indica en cada cas si es tracta d'un nombre natural o enter no natural:

a)  $12 + n = 12$       b)  $n + 17 = 10$   
 c)  $25 + n = 31$       d)  $n + 14 = 11$

2. Ordena de més petit a més gran els nombres enters següents:

$-10, 13, -14, 23, 36, -25, -6, 42, -11, -17, 26, 8$

3. Escriu el símbol  $<$  o  $>$ , segons convingui:

a)  $-7 \dots -10$       b)  $2 \dots -4$   
 c)  $28 \dots 35$       d)  $-13 \dots -11$   
 e)  $-1 \dots 1$       f)  $-3 \dots 0$

4. Calcula les sumes següents:

a)  $-7 + (-5)$       b)  $3 + (-11)$       c)  $-9 + (-6)$   
 d)  $-8 + 6$       e)  $12 + 5$       f)  $-21 + 7$

5. Escriu l'oposat de cadascun dels nombres enters següents:

$-17, 3, -1, 8, -12, 0, -9, 11$

6. Completa la taula de sumar:

|    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|---|
| +  |    | -2 |    |    |   |
|    | 12 |    | 14 |    |   |
| -8 |    |    |    |    |   |
| 3  |    |    | 12 |    |   |
|    | 3  |    |    |    | 4 |
| -6 |    |    |    | -7 |   |

7. Efectua les restes següents, transformant-les prèviament en sumes:

a)  $5 - 13$       b)  $-17 - 8$       c)  $4 - (-8)$   
 d)  $-10 - (-7)$       e)  $11 - 3$       f)  $9 - (-14)$

8. Sobre la recta numèrica, ens situem en el punt representat pel nombre 2, i a continuació, fem els desplaçaments següents, l'un darrere l'altre:

1r: 3 unitats cap a la dreta.

2n: 8 unitats cap a l'esquerra.

3r: 4 unitats cap a la dreta.

4t: 2 unitats cap a l'esquerra.

a) Indica en quin punt serem després de cada desplaçament.

b) A quin punt anirem a parar després dels quatre desplaçaments?

c) Expressa els quatre desplaçaments junts mitjançant operacions.

9. Calcula:

a)  $-12 - (-4) + 7 - (-3)$   
 b)  $14 - (-13) + (-22) - (-1) + (-3)$   
 c)  $-5 - (-11) + (-3) + 5 - (-7)$   
 d)  $6 - (-4) - 7 + (-8) + 12 + (-6)$   
 e)  $7 - (-9) - 6 + (-4) - (-5)$   
 f)  $25 - (-21) + (-29) + (-5) - 12$

10. Calcula:

a)  $-120 \cdot (-3)$       b)  $5 \cdot (-20)$       c)  $-4 \cdot (-12)$   
 d)  $-1 \cdot 50$       e)  $-13 \cdot (-3)$       f)  $0 \cdot (-8)$

11. Si  $a = -2$ ,  $b = 7$ ,  $c = 3$  i  $d = -4$ , calcula:

a)  $a + b$       b)  $b - a$       c)  $-b - a$   
 d)  $a - b$       e)  $a \cdot b$       f)  $a \cdot c \cdot d$   
 g)  $-b \cdot d$       h)  $a \cdot b \cdot c \cdot d$       i)  $-b \cdot a \cdot d$

12. Indica si la divisió dóna un nombre enter i en cas afirmatiu calcula'n el quocient:

a)  $-120 : 12$       b)  $-49 : (-7)$       c)  $-130 : 3$   
 d)  $-100 : (-1)$       e)  $0 : (-2)$       f)  $-150 : (-50)$   
 g)  $121 : (-11)$       h)  $-56 : 8$       i)  $-37 : 37$

- 13.** Escribe los cinco términos siguientes de cada una de las series:

a) 7, 11, 15, 19, ...

b) 2, 0, -2, ...

c) 13, 5, -3, -11, ...

d) -4, -1, 2, ...

- 14.** Digue si les afirmacions següents són certes o falses. Justifica les que siguin falses. Et pots ajudar d'exemples.

a) La suma de dos nombres enters negatius sempre dona un altre nombre enter negatiu.

b) Tots els nombres naturals són enters.

c) El nombre 0 és l'element neutre de la suma de naturals.

d) La resta de nombres enters compleix la propietat commutativa.

e) Tots els nombres enters són naturals.

- 15.** A les nou del matí, un termòmetre situat al Montseny assenyalava  $-3^{\circ}\text{C}$ . Si a les dues del migdia la temperatura ha augmentat  $8^{\circ}\text{C}$ , quina temperatura marcarà aleshores el termòmetre?

- 16.** Un submarí és a 650 m de profunditat. Si baixa 175 m, a quina fondària es trobarà?

- 17.** L'altura de l'Everest és de 8 845 m sobre el nivell del mar i la fossa de les Marianes té una fondària d'11 516 m. Quina distància hi ha entre el cim més alt i la fossa més profunda del nostre planeta?

- 18.** L'any 776 aC van tenir lloc els primers Jocs Olímpics de la història. A la ciutat de Barcelona s'hi van celebrar els Jocs Olímpics del 1992. Quants anys van transcórrer des dels primers Jocs fins als de Barcelona?

- 19.** El punt O és el punt mitjà del segment d'extremes A i B. Sabent que al punt A li correspon el nombre -4 i al punt O li correspon el nombre 0, quin nombre correspondrà al punt B?

- 20.** Indica el signe de les potències següents:

a)  $(-4)^7$       b)  $(-2)^{12}$       c)  $-9^4$

d)  $(-1)^{49}$       e)  $13^5$       f)  $-6^5$

- 21.** Un determinat dia, la temperatura de Toronto era de  $-11^{\circ}\text{C}$ ; a Londres, el termòmetre assenyalava  $18^{\circ}\text{C}$  més, i a Moscou  $-22^{\circ}\text{C}$  menys que a Londres. Quina era la temperatura a Moscou?

- 22.** L'any 465 aC va caure a Egos Potamos un gran meteorit i 2 274 anys més tard en va caure un altre a la població francesa d'Orne. Quin any va caure el meteorit a Orne?

- 23.** Tenint en compte les dades referents als canvis horaris que es presenten al començament de la unitat, calcula la diferència horària que hi ha entre França i el Brasil, i entre Nova York i Tòquio.

- 24.** Troba el valor de  $n$  en cada cas:

a)  $(-5)^n = 625$

b)  $(-n)^3 = -8$

c)  $-9^2 = n$

d)  $(-3)^n = -27$

e)  $(-n)^{15} = -1$

f)  $n^5 = 32$

- 25.** El gran matemàtic grec Pitàgores va néixer l'any 580 aC. Sabent que va viure 80 anys, pots indicar quin any va morir?

- 26.** En Ferran ha estalviat 85 €. Per les festes de Nadal s'ha comprat dos CD, que li han costat 15 € i 13 €, i un joc de PC, que li ha costat 43 €. Com que li han sobrat diners, ha pensat a comprar un regal per a la seva germana, que costava 16 €, però en veure que li falten diners els ha demanat a la seva mare. Quants euros ha hagut de demanar a la mare?

- 27.** Digue si són certes o falses les igualtats següents:

a)  $(-5)^6 = 5^6$

b)  $(-2)^7 = -2^7$

c)  $(-10)^6 = -10^6$



## Ampliació

1. Digues si les afirmacions següents són certes o falses. Justifica les que siguin falses. Et pots ajudar d'exemples.

- L'oposat d'un nombre enter és sempre un nombre enter negatiu.
- La resta de dos nombres enters negatius dóna sempre un altre nombre enter negatiu.
- No hi ha cap nombre enter tal que l'oposat sigui ell mateix.
- Si restem dos nombres enters negatius, el resultat pot ser un nombre enter positiu.
- L'oposat d'una suma de nombres enters és igual a la suma dels oposats dels sumands.
- Si  $a$  i  $b$  són dos nombres enters diferents de zero, i  $a > 0$  i  $b < 0$ , llavors  $a \cdot b < 0$ .
- El quocient de la divisió de dos nombres enters és sempre un altre nombre enter.

2. Sobre la recta numèrica, ens situem en el punt representat pel nombre  $-135$  i, a continuació, fem els desplaçaments següents, l'un darrere l'altre: 251 unitats cap a la dreta, 126 unitats cap a la dreta, 341 unitats cap a l'esquerra, 272 unitats cap a la dreta i 401 unitats cap a l'esquerra. En quin punt hem anat a parar després dels cinc desplaçaments?

3. Calcula:

- $-10 + (-3) - 7 + (-8) + 12 - 9$
- $3 - 5 + 8 - 6 + 10 - 7 + 11$
- $24 - 57 + 89 - 68 + 78 - 95$
- $-43 + 64 - 78 + 94 - 102 - 12 + 57$
- $543 + 108 - 76 - 89 + 115 - 231 - 112$
- $5 - 3 + 2 - (9 - 7 - 5 - 6)$

4. Dedueix a quina operació correspon aquesta taula i completa-la:

|    |    |     |    |   |     |
|----|----|-----|----|---|-----|
|    |    |     | 6  |   |     |
| 2  |    |     |    |   |     |
|    | -3 |     |    |   | -9  |
| -4 |    |     | 10 | 5 |     |
|    |    | -15 |    |   | -17 |
| -5 | 2  |     |    |   |     |

5. Troba el valor de  $a$  en cadascuna de les operacions següents:

- $5 + a = -2$
- $a - (-5) = 10$
- $-12 + a = 7$
- $-4 - a = 12$
- $11 - a = -3$
- $2 + a = -13$
- $-6 + a = -11$
- $-2 - a = -2$
- $-7 - a = 6$
- $-21 : a = -1$
- $-5 \cdot a = -125$
- $a \cdot (-5) = -55$
- $a : (-4) = 25$
- $90 : a = -2$
- $-45 : a = 9$

6. Si  $a = 7$ ,  $b = -2$  i  $c = -6$ , calcula:

- $a + b - c$
- $a - b - c$
- $-a + b + c$
- $c - b - a$
- $-c : b$
- $a \cdot c : b$

7. Si  $a = -4$ ,  $b = -1$ ,  $c = 2$  i  $d = -3$ , calcula:

- $a : b - c \cdot d$
- $3 \cdot c : b - a \cdot d$
- $b^2 - 4 \cdot a$
- $-a - d^2 + b^3$

8. Completa el quadrat de manera que les tres files, les tres columnes i les dues diagonals sumin 9.

|  |   |    |
|--|---|----|
|  |   | 1  |
|  | 3 |    |
|  |   | -3 |

9. Completa aquestes sèries de nombres enters:

- $-12, -16, \dots, -28, \dots, -44$
- $-15, -8, \dots, 6, \dots, 41$
- $7, 2, \dots, -18, \dots, -43, \dots, -58$
- $0, -6, \dots, -30, \dots, -48, \dots, -72$

10. Contesta les qüestions següents:

- Quin és el nombre enter que sumat a  $-8$  dóna 5?
- Quin nombre multiplicat per  $-12$  dóna  $-168$ ?
- Quin nombre dividit per  $-7$  dóna com a quocient  $-8$ ?
- Quin és el nombre enter que restat de  $-2$  dóna 9?
- Quins nombres elevats al quadrat donen 196?
- Quin nombre enter és l'immediatament anterior a 14? I a  $-14$ ?

**11.** L'oposat de la suma de  $-3$  i un altre nombre enter és igual a  $-10$ . Quin és aquest enter?

**12.** En Manel és al soterrani 2 d'uns grans magatzems. A quina planta anirà si puja 8 pisos? I si després en baixa 3, a quina planta arribarà? Quantes plantes haurà de baixar per tornar al soterrani 2?

**13.** Un avió que volava a 9 350 m d'altitud descendeix gradualment 1 485 m, i al cap d'una estona puja 887 m. A quina altitud vola ara l'avió?

**14.** Es col·loquen els nombres enters positius més grans que 1 en les columnes A, B, C, D i E, tal com es pot veure a la figura. En quina de les cinc columnes hem de col·locar el nombre enter 50?

| A  | B  | C  | D  | E  |
|----|----|----|----|----|
|    |    | 2  | 3  | 4  |
| 7  | 6  | 5  |    |    |
|    |    | 8  | 9  | 10 |
| 13 | 12 | 11 |    |    |
|    |    | 14 | 15 | 16 |
| 19 | 18 | 17 |    |    |

**15.** El segment d'extrems AC és el doble de llarg que el segment BC en la recta numèrica. Sabent que al punt B li correspon el nombre enter  $-14$ , i al punt C, el nombre enter 18, quin nombre enter correspon al punt A, si el punt B està entre A i C?

**16.** Quina és la diferència entre el nombre més petit i el més gran dels nombres de tres xifres que es poden formar amb les xifres 3, 5 i 6 sense repetir-ne cap?

**17.** Quins dels nombres 422, 175, 366, 304 i 453 són la suma de tres nombres enters consecutius?

**18.** Un avió fa la ruta París – Tel-Aviv – Nova Delhi – Tòquio. Surt de París a les 11 del matí i arriba a Tel-Aviv a les 4 de la tarda (hora local), fa una escala de 2 hores i surt cap a Nova Delhi, on arriba al cap de 4 hores. Fa una escala d'1 hora i

surt cap a Tòquio, on arriba a les 12 del migdia (hora local) de l'endemà. Indica les hores locals tenint en compte les diferències horàries que es presenten al començament de la unitat i la durada de cada tram, i calcula la durada total del viatge.

**19.** En un torneig de golf, al final de la tercera i última jornada s'han recollit els resultats següents: jugador A, 68, 71 i 69 cops; jugador B, 72, 70 i 67; jugador C, 71, 72 i 69; jugador D, 66, 70 i 68; jugador E, 73, 71 i 72; jugador F, 69, 71 i 71; jugador G, 70, 67 i 68; jugador H, 71, 74 i 70; jugador J, 66, 68 i 69; jugador K, 72, 73 i 69; jugador L, 65, 69 i 73, i jugador M, 70, 69 i 71. Sabent que el par del camp és de 72 cops, escriu la classificació final del torneig i indica la situació de cada jugador respecte al par del camp.

**20.** Les plantes d'uns grans magatzem es distribueixen segons l'esquema següent:

|              |                                  |
|--------------|----------------------------------|
| Soterrani 3  | Pàrquing B                       |
| Soterrani 2  | Pàrquing A                       |
| Soterrani 1  | Supermercat                      |
| Planta baixa | Complements i agència de viatges |
| 1a planta    | Informàtica, música i llibres    |
| 2a planta    | Moda i sabateria                 |
| 3a planta    | Electrodomèstics                 |
| 4a planta    | Mobles i decoració               |
| 5a planta    | Joguines i esports               |
| 6a planta    | Cafeteria i restaurant           |

La Marta arriba als grans magatzems amb cotxe i l'aparca al pàrquing B. Primer encarrega un televisor, després passa a recollir un bitllet d'avió, més tard consulta el preu d'una taula, tot seguit es compra un vestit i unes sabates, i aprofitant que és als grans magatzems, compra un parell de CD. Abans de tornar al pàrquing a agafar el cotxe, es pren un cafè amb llet i una pasta. Determina els diferents desplaçaments que fa la Marta pels grans magatzems.

## Avaluació



Contesta  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o  $d$ , segons convingui:

- El resultat de  $-6 - (-5)$  és:  
a) 11      b) 1      c) -1      d) -11
- Quina de les desigualtats següents és certa:  
a)  $-7 < -3$     b)  $-2 > -1$     c)  $-7 < -9$     d)  $-5 > -4$
- Si  $a = 12$  i  $b = -15$ , el resultat de  $a - b$  és:  
a) -3      b) 3      c) -27      d) 27
- El valor de  $n$  que verifica la igualtat  $-3 + n = -6$  és:  
a)  $n = 9$     b)  $n = 3$     c)  $n = -3$     d)  $n = -9$
- Si  $a$  és un nombre enter tal que  $-22 < a < 15$ , aleshores  $a$  no pot ser:  
a) -24      b) 12      c) -8      d) 0
- El valor de  $n$  que verifica la igualtat  $-5 \cdot n = 40$  és:  
a) 8    b) -8    c) 45    d) cap dels anteriors
- Si  $a = -18$ ,  $b = 14$  i  $c = -9$ , el resultat de  $a - b + c$  és:  
a) -13      b) -41      c) -5      d) 23
- Dels nombres 0, 15, -28, -3, -5 i 2, el més petit és:  
a) 2      b) -28      c) -3      d) 0
- Si  $a + b = 0$ , una de les afirmacions següents no és possible:  
a)  $a$  és l'oposat de  $b$ .  
b)  $a$  i  $b$  són nombres naturals.  
c)  $a = 0$  i  $b = 0$ .  
d)  $b$  és l'oposat de  $a$ .
- El valor de  $n$  que verifica la igualtat  $-36 : n = -4$  és:  
a) 32    b) -9    c) 9    d) cap de les anteriors
- Si  $b$  és un nombre enter negatiu i  $b > -2$ , aleshores  $b$  només pot ser:  
a) -4      b) -5      c) -1      d) -3
- El nombre enter que segueix a la sèrie: 10, 6, 2... és:  
a) 0      b) -2      c) -4      d) -1
- Si  $a$  i  $b$  són dos nombres enters tals que  $a < 0$  i  $b < 0$ , segur que:  
a)  $a \cdot b > 0$       b)  $a \cdot b < 0$   
c)  $a : b < 0$       d) cap de les anteriors
- Si efectuem l'operació  $7 - 9 - 13 + 8 - 5 + 17$  dóna:  
a) -9      b) -5      c) 5      d) 9
- Indica quina de les opcions és falsa:  
a)  $(-5)^7 = -5^7$       b)  $-3^2 > -3^3$   
c)  $(-10)^4 = 10^4$       d)  $(-12)^2 = -12^2$
- El resultat de  $7 - (-6) - (-9) + 4$  és:  
a) -4      b) 26      c) 8      d) 14
- Sabent que el punt  $M$  és el punt mitjà del segment d'extremes  $AB$  de la recta numèrica i que el punt  $A$  representa el nombre -8, i el punt  $B$ , el nombre 10, quin nombre representa el punt  $M$ ?  
a) 19      b) -17      c) 0      d) 1
- La gran piràmide de Kheops va ser construïda l'any 2500 aC. 2 300 anys més tard, Arquimedes va inventar el cargol. Quin any va inventar Arquimedes el cargol?  
a) 200 aC      b) 200 dC  
c) 100 aC      d) 4800 aC
- Les temperatures màxima i mínima d'un dia d'hivern van ser  $3^\circ\text{C}$  sobre zero i  $6^\circ\text{C}$  sota zero, respectivament. Quina va ser l'oscil·lació tèrmica?  
a)  $-9^\circ\text{C}$     b)  $3^\circ\text{C}$     c)  $9^\circ\text{C}$     d)  $-3^\circ\text{C}$
- Si  $a = -3$ ,  $b = -5$  i  $c = 6$ , llavors  $-c : a \cdot b$  és:  
a) -90      b) 10  
c) -10      d) No dóna un nombre enter.